

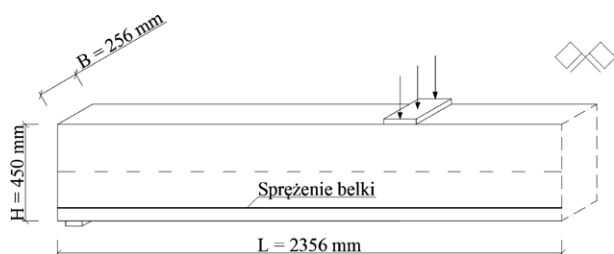
Analiza numeryczna belki strunobetonowej o prostokątnym przekroju poprzecznym

Rozwój analiz numerycznych i mocy obliczeniowej komputerów umożliwia coraz dokładniejsze odwzorowanie pracy statycznej konstrukcji sprężonych. Efektywne zastosowanie zaawansowanych programów komputerowych umożliwia analizę odpowiedzi konstrukcji, która w dużym zakresie jest zgodna z wynikami badań laboratoryjnych.

W artykule przedstawiono propozycję modelowania siły sprężającej, a także dokonano analizy porównawczej wyników obliczeń maksymalnej dopuszczalnej siły sprężającej z wynikami obliczeń prowadzonych z wykorzystaniem algorytmów według [5].

Charakterystyka belki

Przeanalizowano belkę strunobetonową swobodnie podpartą o długości całkowitej 4,712 m i wymiarach przekroju poprzecznego 25,6 × 45,0 cm. Rozpiętość teoretyczna wynikająca z zastosowania podkładek podporowych wynosiła 4,572 m. Belkę obciążono dwiema siłami przyłożonymi w jednej trzeciej rozpiętości w taki sposób, aby w środkowej części uzyskać stały moment zginający (rys. 1). Analizowaną belkę wzorowano na belce żelbetonowej badanej przez *Buckhouse'a* [2], której wyniki stanowiły model kalibracyjny do tego zadania.



Rys. 1. Rysunek ogólny belki

W modelu obliczeniowym zrezygnowano ze stalowych podkładek pod obciążeniem. Podyktowane to było powstawaniem nierzeczywistych zarysowań wynikających z połączenia dwóch różnych materiałów w węzłach siatki, co nie występuje w badaniu laboratoryjnym, a wynika jedynie z niedoskonałości modelu. Zamiast tego obciążenie przykładano do powierzchni o polu równym powierzchni podkładki. Porównanie obciążeń wywołujących osiągnięcie jednej trzeciej wytrzymałości stali sprężającej wykazało zgodność z wynikami w przypadku modelu z podkładką i badań *Wolanskiego* [7].

Elementy skończone

Standardowym elementem skończonym stosowanym w analizach numerycznych konstrukcji betonowych ze zbrojeniem bądź sprężeniem w pakiecie ANSYS jest SOLID65 [1], który umożliwia numeryczne obliczenia nieliniowej odpowiedzi konstrukcji pod obciążeniem statycznym i dynamicznym. Jest on stosowany w analizach trójwymiarowych betonu i pozwala na uwzględnienie zarysowania pod wpływem rozciągania, miażdżenia w przypadku ściskania, a także plastycznych deformacji. Pęknięcie jest dozwolone w trzech orto-

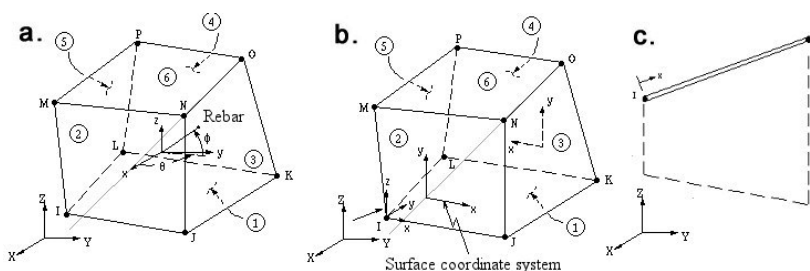
gonalnych kierunkach, w każdym punkcie całkowania. Przyjęto modele opisujące liniowo-sprężyste i nieliniowe zachowanie betonu, z uwzględnieniem pęknięcia i miażdżenia. Jednoosiową wytrzymałość betonu przyjęto zgodnie z zależnością zaproponowaną w [7]. Kryterium zniszczenia w związku z działaniem złożonego stanu naprężenia opisano za pomocą modelu pięcioparametrowego (tabl. 1), zgodnie z teorią zaproponowaną przez *Willama* i *Warnke'a* [6] i według hipotezy *Hubera-Misesa-Hencky'ego*.

W przypadku analizy konstrukcji żelbetonowych i sprężonych, w celu uproszczenia analizy, założono jednoosiowy stan naprężenia w elementach stalowych, a także jednakowe zachowanie w przypadku rozciągania i ściskania. Zastosowano nieliniową zależność odkształcenie – naprężenie wynikającą z zależności zaproponowanych w [7] w odniesieniu do stali sprężającej, aby umożliwić porównanie wyników. Zastosowano element LINK180 o trzech stopniach swobody w każdym węzle (rys. 2). Nie jest uwzględniane zginanie, lecz plastyczność, pełzanie i duże deformacje. Belka charakteryzuje się stałymi parametrami na długości, a z funkcji kształtu wynikają stałe naprężenia na długości.

W odniesieniu do podkładek zastosowano standardowy element służący do modelowania trójwymiarowych, bryłowych struktur SOLID45 (por. rys. 2). Jest on określony przez osiem węzłów, każdy z trzema stopniami swobody. Model materiału przyjęto jak w przypadku stali zbrojeniowej (tabl. 2).

Tablica 1
Parametry modelu betonu

Nazwa parametru	Wartość
Ciężar objętościowy, kN/m ³	23,75
Moduł sprężystości podłużnej, GPa	27,2
Współczynnik <i>Poissona</i>	0,2
Współczynnik przenoszenia sił tnących przez rysę otwartą	0,3
Współczynnik przenoszenia sił tnących przez rysę zamkniętą	1,0
Jednoosiowa wytrzymałość na rozciąganie, MPa	3,59
Jednoosiowa wytrzymałość na ściskanie, MPa	33,09
Dwuosiowa wytrzymałość na ściskanie, MPa	39,71
Wytrzymałość w trójosiowym stanie naprężenia na południku rozciągania, MPa	47,98
Wytrzymałość w trójosiowym stanie naprężenia na południku ściskania, MPa	57,08
Mnożnik sztywności w warunkach związanych z pękaniem	0,6



Rys. 2. Rodzaje elementów skończonych: a) SOLID65, b) SOLID45, c) LINK180

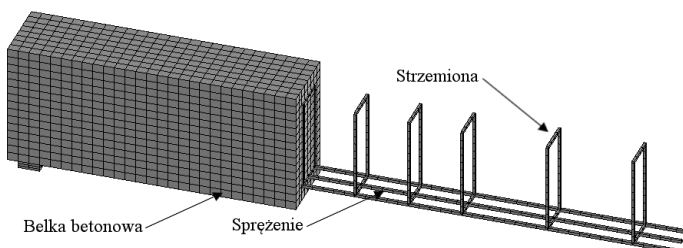
Tablica 2
Parametry modelu stali sprężającej

Nazwa parametru	Wartość
Moduł sprężystości podłużnej, GPa	193,1
Współczynnik Poissona	0,3
Granica plastyczności, MPa	1862,0
Współczynnik rozszerzalności cieplnej, °C ⁻¹	1,2·10 ⁻⁵
Pole przekroju poprzecznego splotu, cm ²	0,987

Siatka elementów skończonych

W konstrukcjach sprężonych stosuje się materiały o odmiennych właściwościach, które wzajemnie mogą się uzupełniać i spełniać określoną rolę, w zależności od warunków pracy. Zarówno w przypadku konstrukcji rzeczywistych, jak i modelu komputerowego, problemem jest zapewnienie odpowiedniej współpracy tych materiałów, co wynika z przyczepności między nimi. Stal sprężająca i zbrojeniowa jest umieszczona głównie tam, gdzie mogą wystąpić naprężenia rozciągające, których nie przenosi sam beton. Jeżeli wartość graniczna naprężeń nie jest przekroczona i nie pojawiły się rysy, zakłada się, że obydwa materiały odkształcają się jednakowo. W przypadku pojawienia się pierwszych zarysowań, beton przestaje pełnić funkcję nośną, a w przekroju przez zarysowanie obciążenia przejmuje stal. Pręty zbrojeniowe przenoszą najczęściej siły równoległe do swojej osi, które zostały przekazane na nie z betonu, a między rysami zachodzi tzw. zjawisko zeszywnienia i beton w tych miejscach przenosi znaczne naprężenia rozciągające [4]. Może to być mylące, ponieważ w jednoosiowym stanie naprężenia przyjmuje się funkcję, która opisuje redukcję wytrzymałości betonu na rozciąganie. Założenie to nie jest jednak słuszne w przypadku bardziej skomplikowanych analiz, gdyż dzięki przyczepności stali do betonu rozciągane pręty zbrojeniowe przekazują na beton znaczne siły. Skutkuje to zwiększeniem ogólnej sztywności elementu w porównaniu z wartościami, jakie wynikałyby z założenia zerowej wytrzymałości betonu na rozciąganie.

Można wyróżnić kilka sposobów podejścia do modelowania połączenia elementów betonowych i stalowych. W programie ANSYS najczęściej jest stosowane podejście rozproszone lub dyskretne, które wykorzystano w analizach. Polega ono na zastosowaniu dyskretnych modeli elementów stalowych (rys. 3), które są połączone z elementami betonowymi w węzłach siatki, co zapewnia współpracę tych materiałów. Zaletą takiego podejścia jest możliwość zastosowania rzeczywistej geometrii i właściwości fizycznych materiałów, a wadą – ograniczenie siatki betonu położeniem elementów stalowych. Doboru wielkości elementów skończonych dokonano w sposób analogiczny jak w [3].



Rys. 3. Siatka elementów skończonych

Warunki brzegowe i obciążenia

W analizie wykorzystano symetrię i modelowano połowę belki, a w środku rozpiętości wprowadzono więzy uniemożliwiające przesuw w kierunku osi X. Zastosowano podporę przesuwną w kierunku X usytuowaną na końcu belki. Obciążenie reakcją przekazano na stalową podkładkę podporową,

a następnie na betonową belkę, co umożliwiła równomierne rozłożenie obciążeń.

• **Sprężenie belki.** Belkę w pierwszym kroku obciążeniowym poddano działaniu siły sprężającej. W pracy Wolanskiego [7] zalecono zastosowanie obciążenia wstępnego, które ma na celu wprowadzić do układu obciążenie ekwiwalentne w stosunku do siły sprężającej. W tym przypadku nie istnieje możliwość przyłożenia siły większej niż jedna trzecia wartości maksymalnej dane-go cięgna sprężającego [7]. Wynika to z definicji obciążenia określanego jako wstępne odkształcenie, które jest przykładane do konstrukcji w postaci jednego kroku obciążenia i nie jest możliwy podział oddziaływania na mniejsze kroki. Skutkuje to niemożliwością uzyskania zbieżności rozwiązania. Wadę tę można zniwelować, stosując podejście zaproponowane w niniejszym artykule, które umożliwia uzyskanie wyników zbliżonych zarówno do analiz Wolanskiego, jak i obliczeń prowadzonych z wykorzystaniem algorytmów zaproponowanych w [5].

Modyfikacja sposobu przykładania obciążenia polega na zastąpieniu wstępnego odkształcenia przez oddziaływanie temperaturowe. Ochłodzenie cięgna sprężającego powoduje jego skrócenie, co skutkuje powstaniem siły ściskającej równoważnej sprężeniu. Wartość temperatury, jaką należy zastosować, można obliczyć ze wzorów na rozszerzalność cieplną:

$$\varepsilon_p = \frac{f_p}{E_p} = \frac{0,8 \cdot 0,75 \cdot 1862,0 \cdot 10^6}{193,053 \cdot 10^9} = 0,005709,$$

$$x = x_0(1 + \varepsilon_p),$$

$$\Delta T = \frac{x - x_0}{x_0 \alpha} = \frac{\varepsilon_p}{\alpha} = \frac{0,005709}{12 \cdot 10^{-6}} = 475,75 \text{ °C},$$

gdzie:

ε_p – maksymalne odkształcenie stali sprężającej,

f_p – maksymalne naprężenie stali sprężającej podczas sprężania,

$E_p = 193,053$ GPa – moduł sprężystości podłużnej stali sprężającej,

x – długość elementu po zmianie temperatury,

x_0 – długość początkowa belki,

$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ – współczynnik rozszerzalności liniowej,

ΔT – przyrost temperatury.

Zastosowanie proponowanego sposobu analizy umożliwia podział kroku obciążenia na mniejsze, a tym samym, w sytuacji pojawiania się rys, na uzyskanie zbieżności rozwiązania, które jest bliskie rozwiązaniu analitycznym. Dzięki temu można uzyskać wyniki bardziej zbliżone do rzeczywistych, które uwzględniają realne wartości siły sprężającej przykładanej do konstrukcji. Zastosowany sposób można wykorzystać w praktycznych analizach realnych elementów bądź konstrukcji sprężonych.

• **Ciążar własny belki.** W drugim kroku obciążenia do konstrukcji przyłożono obciążenie wynikające z ciężaru własnego materiałów. Dodanie tego oddziaływania znacząco wpływa na ugięcie konstrukcji sprężonej. Zostało ono wprowadzone do konstrukcji przez uwzględnienie przyspieszenia grawitacyjnego oraz ciężaru objętościowego betonu.

• **Obciążenie zewnętrzne.** Obciążenie belki przyłożono jako ciśnienie w jednej trzeciej teoretycznej rozpiętości. W celu uzyskania zbieżności rozwiązania i wyznaczenia punktów charakterystycznych pracy konstrukcji sprężonej, zadanie podzielono na kroki obliczeniowe: pierwszego zarysowania, zerowego ugięcia, dekompresji przekroju i uplastycznienia stali. Analizę prowadzono do momentu przerwania obliczeń ze względu na brak możliwości uzyskania zbieżności rozwiązania (tabl. 3).

Tablica 3
Kroki obciążeniowe analizy

Czas początkowy	Czas na końcu kroku	Numer kroku	Przyrost całkowity obciążenia	Liczba kroków	Przyrost obciążenia	Nazwa obciążenia
0,0	0,6	1	-285,45°C	100	-2,855 °C	sprężenie
0,6	1,0	2	-190,30°C	100	-1,903 °C	
1,0	2,0	3	-	5	-	ciężar własny
2,0	66,0	4	66,0 kN	50	1,320 kN	obciążenie zewnętrzne
66,0	67,5	5	1,5 kN	100	0,015 kN	
67,5	95,0	6	27,5 kN	100	0,275 kN	
95,0	115,0	7	20,0 kN	200	0,100 kN	
115,0	126,1	8	11,1 kN	111	0,100 kN	

Analiza modelu obliczeniowego

Analiza sprężysto-plastyczna elementów betonowych wiąże się z problemami uzyskania zbieżności rozwiązania, które wynikają ze zmieniających się warunków zadania, tj. pojawienia się zarysowań i uplastycznienia materiałów. W celu uzyskania poprawnej odpowiedzi konstrukcji jest konieczna zmiana parametrów odpowiadających za zbieżność rozwiązania. W tym celu od czwartego kroku obciążenia zrezygnowano z wykorzystania kryterium siły na rzecz kryterium przemieszczeń. Różnica pojawia się głównie w końcowych fazach obciążenia belki, gdzie występują znaczne zarysowania całego elementu konstrukcyjnego.

Model analizowano z wykorzystaniem punktów restartu umożliwiających rozpoczęcie obliczania kolejnego etapu zadania bez konieczności powtarzania obliczeń od początku. Dzięki temu uproszczono i przyspieszono analizę. Wyniki uzyskane z zastosowaniem obciążenia termicznego ekwiwalentnego do jednej trzeciej siły sprężającej porównano z uzyskanymi przez Wolanskiego [7]. Dobra zbieżność wartości potwierdziła zasadność i poprawność tego podejścia oraz wykorzystania go do analiz obejmujących właściwości materiałowe stali sprężającej.

Wyniki analiz

Zaprezentowana analiza belki sprężonej wykazuje wyniki zbliżone do uzyskanych z obliczeń prowadzonych z wykorzystaniem algorytmów zaproponowanych w [5] i zakładanego sposobu zniszczenia wynikającego z badań doświadczalnych (tabl. 4).

- **Przemieszczenia.** Pierwszy krok obciążenia związany z przyłożeniem siły sprężającej spowodował wygięcie konstrukcji do góry wynoszące 2,566 mm. Uwzględnienie ciężaru własnego spowodowało zmniejszenie strzałki odwrotnej o 0,290 mm. Oba wyniki pokazują dobrą zbieżność z obliczeniami według algorytmów [5] (por. tabl. 4; rys. 4).

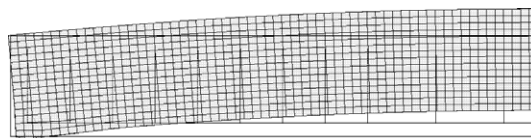
Zwiększanie obciążenia zewnętrznego wywołało przemieszczenia konstrukcji związane ze standardowymi fazami pracy konstrukcji sprężonej. Ostatecznie podczas zniszczenia ugięcia maksymalne w środku rozpiętości wyniosły 65,1 mm (rys. 5).

- **Naprężenia w betonie.** Zastosowane modele obliczeniowe umożliwiają analizę rozwoju naprężeń w elemencie betonowym, który zmienia się wraz z pojawieniem się kolejnych zarysowań. Otrzymałone wyniki są zgodne z wynikami analiz teoretycznych i pozwalają śledzić przebiegającą redystrybucję naprężeń. W miejscu pojawienia się pęknięcia (rys. 6) występuje zmiana naprężeń, która postępuje zgodnie z rozwojem zarysowań.

Tablica 4

Porównanie wyników obliczeń numerycznych i ręcznych

Nazwa parametru	Obliczenia ręczne	ANSYS	Różnica [%]
Ugięcie w środku rozpiętości od sprężenia, mm	-2,595	-2,556	1,5
Naprężenie w górnym włóknie od sprężenia, MPa	-3,37	-3,13	7,1
Naprężenie w dolnym włóknie od sprężenia, MPa	8,99	8,14	9,5
Ugięcie w środku rozpiętości po uwzględnieniu ciężaru własnego, mm	-2,313	-2,266	1,7
Naprężenie w górnym włóknie po uwzględnieniu ciężaru własnego, MPa	-2,56	-2,36	7,8
Naprężenie w dolnym włóknie po uwzględnieniu ciężaru własnego, MPa	8,19	7,39	9,8
Obciążenie niwelujące w środku rozpiętości ugięcia, kN	37,55	36,56	2,6
Obciążenie wywołujące dekompresję w elemencie, kN	47,52	45,52	4,2
Obciążenie, przy którym pojawia się zarysowanie, kN	68,34	66,00	3,4
Ugięcie w środku rozpiętości przy obciążeniu 100,0 kN	16,023	16,487	2,9
Naprężenie w stali sprężającej przy obciążeniu niszczącym, MPa	1820,0	1820,0	0,0
Obciążenie niszczące, kN	125,05	126,10	0,8

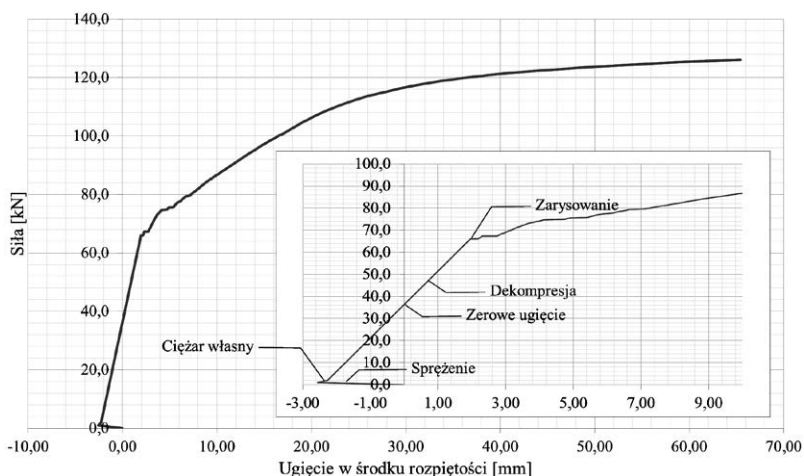


Rys. 4. Deformacja konstrukcji pod wpływem sprężenia; ugięcie -2,556 mm

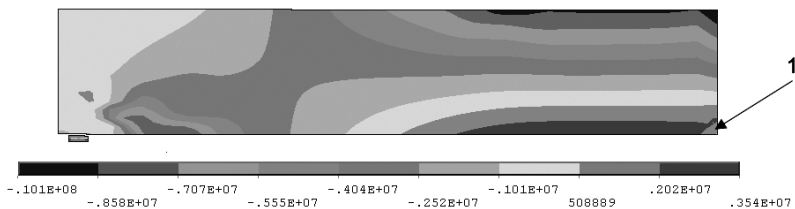
- **Naprężenia w stali.** Stal sprężająca znajduje się we wnętrzu elementu betonowego i z tego względu do momentu pojawienia się zarysowań zachodzi współodkształcalność betonu i stali. Wraz z rozwojem pęknięć stal przejmuje coraz większe naprężenia.

Osiągnięcie maksymalnego wyężenia związanego z uplastycznieniem skutkuje zniszczeniem elementu i brakiem zbieżności rozwiązania zadania. Wartość maksymalnej siły zewnętrznej przyłożonej do konstrukcji dobrze koreluje z obliczeniami „ręcznymi”.

- **Zarysowania.** Skokowe przykładanie obciążenia umożliwiło wymodelowanie pierwszego zarysowania w obszarze stałego momentu przeszłowego przy obciążeniu 66,0 kN. Po przekrocze-

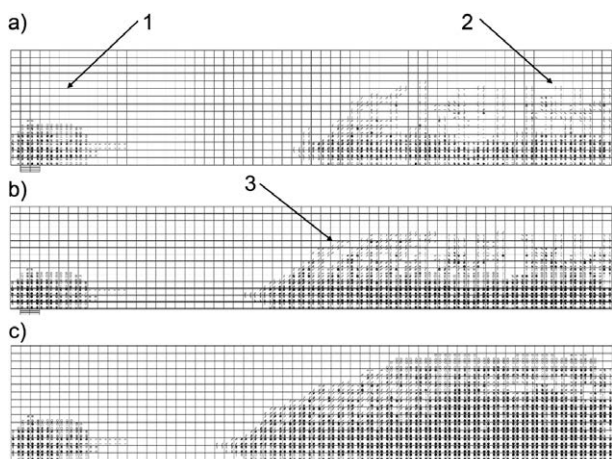


Rys. 5. Wykres zależności ugięcia belki w środku rozpiętości od obciążenia zewnętrznego



Rys. 6. Mapa naprężeń S_{xx} w betonie przy powstaniu pierwszego zarysowania – obciążenie zewnętrzne 66,0 kN; 1 – miejsce pierwszego zarysowania

niu tego obciążenia stal znajdująca się wewnątrz elementu betonowego zostaje „uwolniona” i zaczyna przejmować znacznie większe obciążenia, mimo niewielkiego zwiększenia siły obciążającej. W miarę zwiększania obciążenia zauważa się procesy charakterystyczne w odniesieniu do konstrukcji betonowych, czyli powstawanie rys prostokątnych i ukośnych (rys. 7a, b).



Rys. 7. Mapy zarysowania: a) przy obciążeniu 100,0 kN – widoczne rysy prostokątne, b) przy obciążeniu 115,0 kN – widoczne rysy ukośne, c) przy obciążeniu niszczącym 126,1 kN; 1 – zarysowanie na poziomie cięgna sprężającego, 2 – rysy prostokątne, 3 – rysy ukośne

• **Zniszczenie elementu.** Analizę kontynuowano do momentu przerwania obliczeń numerycznych z powodu braku zbieżności. Ostateczna siła, jaką udało się przyłożyć do konstrukcji jest nieznacznie większa od uzyskanej z obliczeń „ręcznych” (rys. 7c).

Wnioski

Przedstawiony sposób modelowania obciążenia konstrukcji sprężonych może być wykorzystany w praktyce. Pozwala w pełni wykorzystać właściwości stali sprężającej i analizować elementy konstrukcyjne w pełnym zakresie sprężenia. Zastosowanie rozbudowanych modeli materiałowych umożliwia wiernie odwzorowanie pracy konstrukcji sprężonej, a także uwzględnienie współpracy obu materiałów konstrukcyjnych. Pozwala to na obserwację pracy elementu oraz odwzorowanie rozwoju takich procesów, jak zarysowanie, uplastycznienie stali oraz ich wpływu na zachowanie się konstrukcji.

PIŚMIENICTWO

- [1] ANSYS. Inc.: Element reference for Release 12.1, Ansys, Inc., Canonsburg 2011.
- [2] *Buckhouse E.R.*: External Flexural Reinforcement of Existing Reinforced Concrete Beams Using Bolted Steel Channels. Masters Thesis, Marquette University, Wisconsin 1997.
- [3] *Kisala D.*: Analiza nieliniowa belek żelbetonowych z dyskretnym modelowaniem zbrojenia. Materiały IV ogólnopolskiej konferencji budowlanej studentów i doktorantów „Euroinżynier”, Kraków 2014.
- [4] *Majewski S.*: Mechanika betonu konstrukcyjnego w ujęciu sprężysto-plastycznym. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2003.
- [5] *Nawy E.G.*: Prestressed Concrete: A Fundamental Approach Prentice-Hall. Upper Saddle River, New York 2000.
- [6] *Willam K.J., Warnke E.P.*: Constitutive Model for Triaxial Behaviour of Concrete. Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses. “International Association of Bridge and Structural Engineering Conference”, Bergamo 1974.
- [7] *Wolanski A.J.*: Flexural Behaviour of Reinforced and Prestressed Concrete Beams Using Finite Element. Masters Thesis, Marquette University, Wisconsin 2004.